

4e - Chapitre 5 : Puissances

Pendant tous les cours, je vous encourage à travailler avec vos camarades.

Échangez, partagez, comparez vos résultats, expliquez entre vous vos démarches et raisonnements

Chercher	Représenter	Modéliser	Calculer	Raisonner	Communiquer
Savoir différencier une puissance positive et négative en fonction de l'ordre de grandeur d'un résultat	Connaître la représentation des très grands nombres et très petits nombres par des puissances, connaître l'écriture scientifique d'un nombre	Savoir transformer un problème contenant de très grands ou très petits nombres avec des puissances.	Connaître toutes les règles de calcul sur les puissances		Savoir donner l'écriture d'un nombre en puissance et en écriture scientifique pour évaluer un ordre de grandeur d'un résultat.

I. Puissance entière positive d'un nombre

Définition : Si a est un nombre relatif et n un entier naturel (c'est à dire un entier positif) alors $a^n = a \times a \times a \times \dots \times a \times a \times a$ où a est multiplié par lui même n fois. a^n se lit " a puissance n " ou " a exposant n ".

Exemples : $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$, $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$, $(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = -27$ (on remarquera dans cet exemple que le résultat est négatif car on multiplie entre eux une quantité impaire de nombres négatifs). $2,5^3 = 2,5 \times 2,5 \times 2,5 = 15,625$

Remarques :

$a^1 = a$ quel que soit le nombre a

a^2 peut se lire " a au carré " (car c'est la formule utilisée pour calculer l'aire d'un carré de côté a)

a^3 peut se lire " a au cube " (car c'est la formule utilisée pour calculer le volume d'un cube de côté a)

$a^0 = 1$ quel que soit la valeur de a .

Par exemple $2^0 = 1$ ou $(-5,3)^0 = 1$

II. Puissance négative d'un nombre

Définition : Soit a un nombre relatif et n un entier naturel alors : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Exemples : $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$; $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$; $(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = \frac{1}{-125} = -\frac{1}{125}$

Cas particulier : Quel que soit le nombre a , $a^{-1} = \frac{1}{a}$ donc a^{-1} est l'inverse de a

III. Puissances de 10

Propriétés : Soit n un entier positif. Alors : $10^n = 10 \times 10 \times 10 \times \dots \times 10 \times 10 = 1000 \dots 000$ c'est à dire 1 suivi de n zéros, et $10^{-n} = \frac{1}{10^n} = 0,000 \dots 0001$ c'est à dire n zéros devant le 1.

Exemples : $10^5 = 100\,000$; $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$; $10^9 = 1\,000\,000\,000$ (un milliard), $10^{-6} = 0,000001$ (un millionième)

IV. Calculs avec les puissances

Propriété : Si m et n désignent des nombres entiers relatifs (positifs ou négatifs) et a et b désignent des nombres relatifs, alors :

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$a^m \times b^m = (a \times b)^m \quad (\text{il faut que ce soit la même puissance})$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad (\text{il faut que ce soit la même puissance})$$

Exemples :

$$10^5 \times 10^3 = 10^8 \quad ; \quad \frac{10^7}{10^3} = 10^{7-3} = 10^4 \quad ; \quad 5^9 \times 5^{-2} = 5^{9+(-2)} = 5^7 \quad ; \quad ((-3)^5)^7 = (-3)^{35}$$

$$\frac{10^8}{10^{-2}} = 10^{8-(-2)} = 10^{10} \quad (\text{attention aux signes dans cet exemple})$$

V. Préfixes scientifiques :

T (téra)	G (giga)	M (méga)	k (kilo)	1	m (milli)	μ (micro)	n (nano)
10^{12}	10^9	10^6	10^3	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}
	<i>milliard</i>	<i>million</i>	<i>millier</i>	<i>unité</i>	<i>millième</i>	<i>millionième</i>	<i>milliardième</i>

Exemples : 10^{-3} mètre = 0,001 mètre = 1 millimètre
1 Giga Tonne = 10^9 tonnes = 1 milliard de tonnes

VI. Notation scientifique d'un nombre :

Définition : La notation scientifique d'un nombre est la seule écriture de la forme $a \times 10^n$ dans laquelle a est un nombre tel que $1 \leq a < 10$ et n est un entier relatif (positif ou négatif)

Par exemple, 15 000 000 s'écrit en notation scientifique : $1,5 \times 10^7$

Pour trouver rapidement la notation scientifique, on peut visualiser le déplacement de la virgule. En effet, dans 15 000 000, la "virgule" est juste après le dernier 0 (que l'on écrit pas mais elle y est). Ensuite, on la déplace pour la mettre entre 1 et 5 (car le a de la notation $a \times 10^n$ doit être entre 1 et 10) et donc on a déplacé la virgule de 7 rangs. Donc $15\,000\,000 = 1,5 \times 10^7$.

Exemples :

$$4\,850\,000\,000 = 4,85 \times 10^9 \quad ; \quad 0,00000036 = 3,6 \times 10^{-7} \quad ; \quad 780\,000 = 7,8 \times 10^5 \quad ; \quad 0,0000147 = 1,47 \times 10^{-5}$$